Documento distribuído por
culturagalega.org

Eu tamén son noetheriana

Ana Belén Rodríguez Raposo

Data de publicación: 13-4-2011

CONSELLO DA CULTURA GALEGA

Comisión de Igualdade

Pazo de Raxoi, 2º andar. 15705 Santiago de Compostela (Galicia)
Tfno.: 981957202 / Fax: 981957205 / xenero@consellodacultura.org

Eu tamén son noetheriana

Ana Belén Rodríguez Raposo

Xornada *María Josefa Wonenburger Planells na creación de coñecemento*
Consello da cultura Galega

Resumo

Nesta nota exploraremos a vida e a obra da matemática alemana Emmy Noether, centrándonos no coñecido como problema inverso de Galois, relacionado co problema de Noether.

1. Introdución

Sempre resulta interesante coñece-las orixes da investigación actual. En Matemáticas, e posiblemente en calquera ciencia, a orixe dun problema pode resultar estar totalmente alonxada do enfoque e das técnicas actuais Coñecer esta orixe resulta enriquecedor e esclarecedor na maioría das situacións. Outras veces atopamos outro tipo de sorpresas, máis humanas, xa que nalgunhas ocasións quen está detrás desa orixe é unha muller. Por unha banda é agradable ver como as pioneiras deixaron unha fonda pegada na Historia da Ciencia. Por outra banda é descorazonanador, xa que case sempre realizaron os seus estudios a costa de grandes sacrificios e despois de superar enormes trabas sociais. Dende Hipatia ata os nosos días son elas as luces nun mundo cheo de sombras para as mulleres. E será unha destas luces a que nos guíe neste pequeno resumo, xa que coñeceremos a unha muller alegre, humilde, xenerosa e cun talento matemático excepcional. Con esta breve descrición poderiamos falar tanto de María Wonenburger como de Emmy Noether. Ambas foron matemáticas excepcionais, cunha multitude de alumnos brillantes, ós que inspiraron e cos que xenerosamente compartiron as dúas ideas. Ambas son as nais de liñas de investigación que en maior ou menor medida seguen a estudiarse hoxe en día. E ambas son, por dereito propio, luces neste camiño que estamos empezando a percorrer.

Ó longo deste resumo estudiaremos brevemente a vida e a obra de Emmy Noether, para, a continuación, centrarnos no problema de Noether. Veremos que o problema de Noether ten as súas orixes na resolución de ecuacións polinómicas e a teoría de Galois, e serve como fío para chegar ata a actualidade, onde mencionaremos unha xeneralización do problema inverso de Galois na teoría de Álxebras de Hopf.

2. Emmy Noether: A nai da Álxebra

2.1. A muller

Amalie Noether, máis coñecida como Emmy Noether, naceu na cidade de Erlangen o 23 de marzo de 1882. Era filla do matemático Max Noether, profesor na Universidade de Erlangen. Así, a pequena Emmy medrou nun ambiente moi favorable para o seu desenvolvemento intelectual. Despois de acaba-los seus estudios na escola, decidiu segui-lo camiño de moitas rapazas acomodadas, e prepara-los seus exames para poder exercer como profesora de idiomas en colexios de educación media para señoritas. E no ano 1900, en efecto, aprobou estes exames, pero nunca chegou a exercer, xa que nese momento decidiu que a súa verdadeira vocación estaba nas Matemáticas. Quixo matricularse na Universidade de Erlangen como alumna oficial, pero naquel momento os estatutos desta institución prohibían expresamente que as mulleres se matriculasen. Podían asistir, iso si, como oíntes, sempre e cando os profesores das materias correspondentes desen o seu permiso. Desta maneira, pedindo permisos, completou Emmy a súa formación académica, que a levou a aproba-los exames de graduación en Nürenberg no ano 1903. Isto permitiulle asistir na Universidade de Göttingen ás clases de Hilbert, Klein e Minkowski, e tomar contacto por primeira vez co que naquel momento era o centro de investigación en Matemáticas máis importante do mundo.

No ano 1904 os estatutos da Universidade de Erlangen cambiaron, e por fin lle foi permitido matricularse como alumna oficial. Así, regresou a casa a doutorarse baixo a dirección de Paul Gordan, realizando uns cálculos monstruosos que lle permiten obter 331 invariantes dunha familia de curvas. No ano 1907 defendeu a súa tese, obtendo a cualificación de sobresaliente *cum laude*. A modo de curiosidade, diremos que foi a segunda muller en conseguir o título de doutora en Matemáticas en Alemania. A primeira en obter tal honra foi nada máis e nada menos que Sofia Kovalevskaia. Agora o que correspondía era conseguir a habilitación para poder exercer como profesora na Universidade. E como xa viña sendo habitual na vida de Emmy, este "privilexio" foille negado, de novo por ser muller. Sen embargo, como seu pai tiña problemas de saúde, ela adoitaba imparti-las súas clases. A parte de facerse cargo da docencia que seu pai non podía asumir, continuou coa súa investigación, primeiro en colaboración con Gordan, e máis adiante co seu sucesor na cátedra, Ernst Fischer. Esta colaboración foi fundamental na vida matemática de Emmy, xa que a achegou ás ideas conceptuais e abstractas de Hilbert. Pouco a pouco foi acadando fama dentro de Europa, e os recoñecementos chegaban dende todos lados. No ano 1908 foi elexida membro do *Circolo Matematico di Palermo*, en 1909 invitóuselle a formar parte do *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* e en 1913 foi a Viena a dar clase, e todo isto sen recibir nin un céntimo da Universidade de Erlangen.

O ano 1915 foi crucial na vida de Emmy, xa que Hilbert e Klein a invitaron a dar clase na Universidade de Göttingen. Porén non foi todo tan doado, xa que as autoridades administrativas dubidaban da capacidade docente e científica de unha muller. Foi a raíz deste incidente cando Hilbert pronunciou as súas famosas palabras: *Non vexo que o sexo da candidata deba ser un impedimento. Á fin e ó cabo, esto é unha Universidade e non unha casa de baños.* Nin todo o apoio de Hilbert e de Klein conseguiron que Emmy fose aceptada como membro do claustro. A pesar de todo, comezou a dar as clases de Hilbert. Pouco a pouco as autoridades fóronse facendo á idea de que unha muller ocupase as súas aulas, e acabou por recibir un pequeno salario, por suposto inferior ós dos seus compañeiros varóns, pero que lle chegaba para vivir moi modestamente. Esta falta de recoñecemento neste aspecto contrasta vivamente co seu crecente prestixio dentro do mundo científico. Foi en Götingen onde creou a súa escola, coñecida como os "rapaces de Noether", cos que nunca tivo reparo en comparti-las súas ideas, e incluso regalarllas. E non tivo este comportamento só cos seus alumnos, senón tamén cos seus múltiples colaboradores e seguidores, entre os que atopamos nomes tan ilustres como van der Waerden, Weyl ou Hopf.

E cando parecía que as cousas empezaban a ir ben, no ano 1933 chegaron os nazis ó poder en Alemania. Pouco a pouco, os xudeus que ocupaban postos na Universidade tiveron que emigar a lugares máis amables para eles. Emmy non foi menos, e marchou a Estados Unidos a finais deste ano, onde atopou traballo no *college* feminino Bryn Mawr, dirixido por unha antiga alumna súa. Xa ben coñecida e cunha gran reputación, foi invitada ó Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, lugar onde traballaban naquel momento Einstein e Gödel, entre outros. E o que debía representar, por fin, a estabilidade na vida desta xenial matemática, tivo o seu definitivo final no ano 1935. Un problema xinecolóxico, do que só sabían os seus amigos máis achegados, levou a Emmy a pasar por unha intervención que desembocou un par de días despois nun fallo cardíaco, e finalmente na morte.

2.2. A matemática

A vida matemática de Emmy Noether comezou na teoría de invariantes, unha das disciplinas da álxebra que tiña máis pulo naquel momento. Dito dun xeito sinxelo, a teoría de invariantes consiste en estudiar que características dunha curva non cambian despois de aplicarlle certas transformacións xeométricas. As curvas, neste caso, non son máis que o conxunto de solucións dunha ecuación polinómica do tipo:

$$a_{nm}x^n y^m + a_{nm-1}x^{n-1}y^m + \cdots + a_{ij}x^i y^j + \cdots + a_{11}xy + a_{10}x + b_{01}y + a_{00} = 0.$$

Por exemplo, a solución da ecuación $x^2+y^2-4=0$ determina unha circunferencia con centro no punto $(0,0)$ e radio 2. Se movemos esta circunferencia, o seu centro cambiará de lugar, pero non a lonxitude do seu radio. Así, o radio será un invariante xeométrico, pero non o centro. Na teoría de invariantes o que se fai é estudiar a ecuación polinómica que determina a curva e determinar, mediante as características do polinomio, cales son as características que permanecen fixas para un grupo (ver Definición 1) determinado de transformacións xeométricas.

Emmy traballou neste tema durante os primeiros anos da súa vida matemática. Este traballo, que recordemos comezou en Erlangen na súa tese de doutoramento, continuouno en Göttingen coa colaboración de Hilbert, outro dos grandes da teoría de invariantes (e de case calquera rama das matemáticas que se estudiaban a principios do século XX). Un dos primeiros resultados que obtivo en Göttingen, é un bonito teorema que aplica as matemáticas da teoría de invariantes ás leis da física. Este teorema, o *teorema de Noether*, di que calquera principio de conservación (da enerxía, do número bariónico, ...) se corresponde coa existencia dunha clase de simetrías abstractas[1]. O mesmo Einstein, cando coñeceu este resultado, escribiulle a Hilbert dicíndolle que Emmy tiña unha visión moi profunda das Matemáticas. Dentro do estudio da teoría de invariantes, tamén é destacable o coñecido como *problema de Noether* e o problema inverso de Galois, do que falaremos un pouco máis adiante.

A pesar de que na súa chegada a Göttingen continuou traballando na teoría de invariantes, seguindo os métodos que aprendera con Gordan, foi abandonando pouco a pouco esta forma de traballar argumentando que todas esas contas lle impedían ve-las matemáticas que había detrás das ideas que utilizaba. Por unha banda esta nova forma de traballar, e por outra a súa aproximación á teoría de ideais, levaron a Emmy a facer a que pode que sexa a súa contribución máis importante á Álxebra, que foi a unificación de ideas que ata ese momento estaban dispersas e se cría que eran distintas. Para poder comprende-lo alcance da súa teoría, debemos saber antes que é a teoría de ideais e por que se estudiaba.

Un ideal é un certo subconxunto dun anel conmutativo (ver Definición 2), que cumpre a característica seguinte: se collemos un elemento calquera do anel e outro do ideal e os multiplicamos, o resultado está dentro do ideal. Por exemplo, se en $\mathbb{Z}$ collemos todos os múltiplos dun número (calquera, o 3, o 6, o 11 ou o que sexa) forman un ideal. E de feito, este concepto naceu precisamente para xeneralizar esta idea de múltiplo.

O pai da teoría de ideais foi o xenial matemático Richard Dedekind (1831-1916). Dedekind estaba interesado en obter resultados de factorización en aneis de enteiros alxébricos. Os enteiros alxébricos son os números enteiros ós que se lles engaden algúns números máis de tal maneira que se poidan resolver certas ecuacións polinómicas que doutro xeito non se poderían resolver. Por exemplo, a ecuación $x^2+1=0$ non ten solución enteira, pero se a $\mathbb{Z}$ lle engadimos o número imaxinario i teremos un conxunto no que si a poderemos resolver. Este novo conxunto $\mathbb{Z}[i]$ é o que se coñece como anel de enteiros de Gauss, e os seus elementos son da forma $n+im$, sendo n e m enteiros. Pódense definir máis aneis deste estilo, que nos servirán para resolver outro tipo de ecuacións. O obxectivo de Dedekind era demostrar que nestes aneis tamén existen "números primos", e obter que calquera número se escribe de maneira única como producto de primos. E por que utiliza-la teoría de ideais? Simplemente, porque un número primo en $\mathbb{Z}$ se corresponde cun ideal especial que se chama primo, e o conxunto de ideais de $\mathbb{Z}$ cumpren resultados de factorización que se obteñen da traducción dos teoremas sobre factorización da aritmética.

Por outra banda, volvemos atopar a Hilbert. Hilbert (e os seus alumnos) estaba interesado na teoría de invariantes e nos aneis de polinomios. Así, o obxectivo de Hilbert era caracteriza-los ideais nos aneis de polinomios, é dicir, dar un criterio que permitise decidir se un polinomio pertence a un ideal ou non. Hoxe en día, este problema está pechado gracias ás aportacións de Gröbner e o seu alumno Buchberger, e deu lugar á fructífera Álxebra Computacional, que representa unha das ramas máis en auxe da actualidade, non só polas súas múltiples aplicacións prácticas, senón tamén polos retos matemáticos que presenta.

Emmy Noether, estudiando por un lado a obra de Dedekind, e por outro lado colaborando con Hilbert, descubriu que en realidade ambos problemas eran o mesmo. Dicindo o mesmo referímonos a que os obxectos de estudio cumpren uns axiomas comúns. Desta maneira, estu-

[1]En Física, as simetrías son transformacións xeométricas dos sistemas de referencia que preservan as leis da física, como xiros ou traslacións. Cada clase de simetrías forma un grupo.

diando os obxectos de maneira axiomática pódense resolver problemas tan dispares como os de factorización ou os de caracterización de ideais. Este estudio das estructuas, que hoxe é tan evidente para un alxebrista, nunca se levou a cabo ata que Emmy fixo notar que en realidade era máis doado abstraer que concretar. Está aquí o xerme, polo tanto, das técnicas actuais da Álxebra, e de importantes ramas da Álxebra como a teoría de categorías ou a teoría de módulos. Porén corremos o perigo de chegar a lugares demasiado abstractos, dos que despois nos coste saír, pero é un risco que debemos asumir, xa que os beneficios son moi grandes.

As Matemáticas de Emmy Noether non rematan aquí, xa que unha vez que abandonou o estudio da Álxebra Conmutativa, abordou outros problemas de Álxebra Non Conmutativa, Teoría de Homoloxía ou Teoría de Representacións, que hoxe en día supoñen liñas de investigación en pleno auxe.

Para todos aqueles que desexen obter máis información sobre a vida ou a obra de Emmy Noether recomendamos que consulten [3, 4, 5, 6].

3. O problema de Noether

3.1. Cando podemos resolver $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$?

Que non é o mesmo que preguntamornos cando esta ecuación ten solución, xa que sabemos que se os coeficientes son números reais a ecuación sempre ten solución, e que de feito ten exactamente n solucións complexas. O único que queremos saber é cando podemos chegar a esta solución, ou o que é o mesmo, cando imos poder "despexa-la x". En principio, podemos sentirnos tentados a dicir que sempre o imos poder facer. Pode que sexa difícil, e pode que nós non o saibamos facer, pero, claro que se pode despexar! Por que non se vai poder facer? Pois, simplemente, porque hai demasiadas contas para realizar. E imos explorar un criterio que nos permita decidir, polo menos teoricamente, cando podemos resolve-la ecuación por métodos alxébricos.

Tomemos unha ecuación de grao 2

$$x^2 + bx + c = 0.$$

Esta ecuación si que a sabemos resolver, e para resolvela temos que facer unhas operacións que teñen unha certa repercusión sobre a ecuación. Para comprende-lo efecto que teñen debemos analiza-la forma que ten se a escribimos en función das súas raíces. Supoñamos que os números α e β son solucións da ecuación, é dicir, que son as súas raíces. Entón podemos escribi-lo polinomio da seguinte forma:

$$x^2 + bx + c = (x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta,$$

así obtemos que

$$\begin{array}{lll} b & = -(\alpha+\beta) & = f(\alpha,\beta) \\ c & = \alpha\beta & = g(\alpha,\beta). \end{array}$$

Vemos que podemos intercambia-los papeis de α e de β, e que a ecuación seguiría sendo a mesma. É dicir, que os coeficientes son *función simétrica* das raíces. E isto significa que *antes de resolve-la ecuación non temos xeito de distinguir entre as dúas raíces do polinomio*. Isto vai suceder en xeral. É dicir, se tomamos unha ecuación polinómica arbitraria

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

sucede que cada coeficiente se pode escribir como función simétrica das raíces:

$$a_i = f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n), i = 1, \dots, n,$$

formando estas simetrías un grupo G, que chamaremos grupo de Galois. E este grupo de simetrías é, precisamente, o que nos impide distinguir unhas raíces de outras. E esta imposibilidade de distingui-las raíces entre sí é o que nos impide coñecelas. Entón, se somos quen de transforma-los coeficientes, e polo tanto as funcións simétricas que os determinan, de tal xeito que poidamos distingui-las raíces entre sí, estaremos resolvendo a ecuación. Este proceso podémolo resumir dicindo que para despexar unha incógnita debemos elimina-las simetrías que nos molestan. Moitas veces, se nos poñemos a facer contas para resolver unha ecuación, ou un sistema de ecuacións, acabamos obtendo expresións triviais do tipo $x = x$, e isto quere dicir, simplemente, que non estamos eliminando as simetrías dun xeito correcto. Outras veces nin tan sequera vai existir un "xeito correcto" de eliminar simetrías. E isto sabémolo estudiando a estructura do grupo G.

O problema está en obte-lo grupo G correspondente a cada ecuación. Para resolver este problema teremos que recurrir á teoría de extensións de corpos (ver Definición 3), que vai involucra-lo corpo no que estean os coeficientes e corpos máis grandes nos que estean as raíces do polinomio a estudiar. Supoñamos que temos a ecuación $x^2 - 2 = 0$, que é unha ecuación que ten coeficientes racionais, é dicir, os seus coeficientes pódense escribir como fraccións. As solucións desta ecuación non son, sen embargo, números racionais, xa que son $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$. Entón teremos que amplia-lo noso conxunto de números racionais $\mathbb{Q}$ co número $\sqrt{2}$. Así construímos o que chamamos unha *extensión de corpos* $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, e podemos facelo porque podemos elimina-las simetrías asociadas á ecuación.

En xeral, se temos unha ecuación $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$ con coeficientes racionais, e con raíces $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, o noso obxectivo é construí-la extensión de corpos $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, que ten un grupo de Galois G asociado a ela, e que en esencia consiste en deixa-los números racionais fixos e intercabia-la orde de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Por exemplo, na extensión de corpos $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, o número $\frac{1}{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{3}$ podémolo transformar en $\frac{1}{3} + 3\sqrt{3} - \sqrt{2}$ pero non en $-3 - \frac{1}{3}\sqrt{2} + \sqrt{3}$. Desta maneira traducimos a unha linguaxe de teoría de corpos o significado de *intercambia-las raíces da ecuación de maneira que os coeficientes queden invariantes*. Agora xa só nos queda decidir cando podemos construír esta extensión de corpos nun número finito de pasos:

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}(\beta_1) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

o cal podemos decidir coñecendo o grupo de Galois e comprobando se cumpre unha condición alxébrica, que é nin máis nin menos que dicir se o grupo é resoluble ou non.

Se etendemos esta teoría a un contexto abstracto podemos enunciar:

Problema de Galois

Dada unha extensión de corpos arbitraria $K \hookrightarrow F$, atopa-lo seu grupo de Galois.

Este problema está relacionado coa teoría de invariantes, e polo tanto foi obxecto do estudio de Emmy durante a súa primeira época. A ela ocorréuselle enuncia-lo que se coñece como

Problema inverso de Galois

Dado un corpo K e un grupo G, hai algún corpo F que cumpra que G é o grupo de Galois de $K \hookrightarrow F$?

Asociado a este problema enunciou o coñecido como *problema de Noether*, que ten un enunciado máis complicado e que require coñecementos que non están ó noso alcance, máis polo espacio que pola súa dificultade intrínseca.

Un tratamento histórico deste tema pode atoparse en [2].

4. Eu tamén son noetheriana

Nesta sección describiremos como se estudian na actualidade problemas tipo Galois, e que están relacionados co problema inverso de Galois. Para isto necesitamos introducir un novo concepto, que nace na Topoloxía Alxébrica como unha xeneralización do concepto de grupo.

Recordemos que o que define a un grupo é que ten unha operación interna. É dicir, se G é un grupo, dados dous elementos $g, h \in G$ podemos obter un novo elemento operando h e g:

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ (g, h) & \mapsto & gh. \end{array}$$

Para obter unha álxebra de Hopf, ademais da multiplicación, imos necesitar unha "comultiplicación", é dicir, a partir de un elemento de G imos obter dous novos elementos:

$$\begin{array}{rcl} G & \rightarrow & G \otimes G \\ g & \mapsto & g \otimes g. \end{array}$$

Por suposto, non é tan sinxelo definir unha álxebra de Hopf, xa que teremos que facer o grupo máis grande engadíndolle elementos dun anel, e dar unhas relacións de compatibilidade entre a multiplicación e a comultiplicación. En calquera caso, o que nos interesa é que a teoría de Galois pode reformularse en termos de álxebras de Hopf. Neste novo contexto, o problema inverso de Galois formularase:

Dado un anel B e unha álxebra de Hopf H, cando podemos atopar unha álxebra A para que $B \hookrightarrow A$ teña por "grupo de Galois" a H?

E neste caso, baixo certas condicións, imos poder construír un anel $B \times H$ que desempeñe o papel de A. Para un tratamento técnico recoméndase, por exemplo, [1].

5. Apéndice: definicións e conceptos

Definicion 1. Un *grupo* é un conxunto G que ten unha operación interna $\cdot$ que é asociativa, ten elemento neutro e para a que todos os elementos teñen inverso. O neutro é un elememto $e \in G$ que non modifica ningún elemento operado con el ($g \cdot e = g \forall g \in$), e o inverso dun elemento g é outro elemento g^{-1} que ó operalo con g da o neutro ($g \cdot g^{-1} = e$).

Por exemplo, o conxunto de movementos ríxidos no plano é un grupo xunto coa operación composición. O neutro neste caso será a identidade, é dicir, non facer nada, e o inverso é desface-lo movemento.

Outro exemplo é o conxunto de enteiros coa suma, onde o neutro é o cero, xa que sumar cero é o mesmo que non sumar nada, e para calcula-lo inverso dun número só teremos que cambiarlle o signo.

Definicion 2. Un *anel* é un conxunto A que ten unha suma e unha multiplicación, sendo a multiplicación distributiva con respecto á suma. Se a multiplicación é conmutativa, diremos que o anel é *conmutativo.*

Un exemplo de anel conmutativo é o conxunto dos enteiros coa suma e a multiplicación. Outro exemplo é o conxunto dos polinomios coa suma e a multiplicación de polinomios. As matrices cadradas coa suma e o producto de matrices forman un anel non conmutativo.

Definicion 3. Hai un tipo especial de aneis conmutativos, que son os corpos. Un *corpo* é un anel que cumpre que tódolos elementos salvo o cero teñen inverso para a multiplicación. Por exemplo, os números enteiros non teñen inverso para a multiplicación dentro dos propios enteiros (para facernos unha idea, o inverso de 3 é $\frac{1}{3}$, que non é un enteiro), e polo tanto non son un corpo. Sen embargo, calquera fracción $\frac{p}{q}$ distinta de cero ten por inverso a $\frac{q}{p}$, co cal os números racionais si forman un corpo.

Referencias

[1] R. Blattner, S. Montgomery: *Crossed products and Galois extensions of Hopf algebras*, Pacific J. Math. 137(1) 1989, 37-53.

[2] M. Kline: El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días (vol. 2), Alianza Universidad, 2002.

[3] S. Mataix: Matemática es nombre de mujer, Rubes Ed., Barcelona 1999.

[4] M. Ríos Fachal: As mulleres nas Matemáticas, Bahía Ed. 2008.

[5] A. B. Rodríguez Raposo: *Álxebra é nome de muller*, Actas do Seminario de Iniciación á Investigación 2007, Publicacións do Instituto de Matemáticas.

[6] The MacTutor History of Mathematics: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk

RODRÍGUEZ RAPOSO, Ana Belén: “Eu tamén son noetheriana”. Resumo do relatorio presentado no marco da xornada *María Josefa Wonenburger Planells na creación de coñecemento*. Máis información en:
http://www.consellodacultura.org/mediateca/evento.php?id=82 (21/03/2012)