# Eu tamén son noetheriana

Ana Belén Rodríguez Raposo

Departamento de Computación
Universidade da Coruña

28 de outubro de 2010

María Wonenburger na creación de coñecemento

Consello da Cultura Galega - Santiago de Compostela.

# Para comezar:

1. Emmy Noether: A nai da Álxebra
2. O Problema de Noether
3. Eu tamén son noetheriana!

# Emmy Noether: a muller

Emmy Noether

- Naceu en Erlangen (Alemania) en 1882.
- Seu pai era o matemático Max Noether.
- Asistiu como oínte á Universidade (1900).
- Foi a Gottingen a estudiar con Hilbert, Klein e Minkowski (1903).
- Doutorouse dirixida por Paul Gordan (1907).
- A súa fama medraba, pero non lle deixaban dar clase.
- Deu as clases de Hilbert en Gottingen (1915).
- Emigrou a Estados Unidos cando chegaron os nazis ó poder (1933).
- Morreu repentinamente en 1935.

# Emmy Noether: a muller

Emmy Noether

- Naceu en Erlangen (Alemania) en 1882.
- Seu pai era o matemático Max Noether.
- Asistiu como oínte á Universidade (1900).
- Foi a Gottingen a estudiar con Hilbert, Klein e Minkowski (1903).
- Doutorouse dirixida por Paul Gordan (1907).
- A súa fama medraba, pero non lle deixaban dar clase.
- Deu as clases de Hilbert en Gottingen (1915).
- Emigrou a Estados Unidos cando chegaron os nazis ó poder (1933).
- Morreu repentinamente en 1935.

# Emmy Noether: a muller

Emmy Noether

- Naceu en Erlangen (Alemania) en 1882.
- Seu pai era o matemático Max Noether.
- Asistiu como oínte á Universidade (1900).
- Foi a Gottingen a estudiar con Hilbert, Klein e Minkowski (1903).
- Doutorouse dirixida por Paul Gordan (1907).
- A súa fama medraba, pero non lle deixaban dar clase.
- Deu as clases de Hilbert en Gottingen (1915).
- Emigrou a Estados Unidos cando chegaron os nazis ó poder (1933).
- Morreu repentinamente en 1935.

# Emmy Noether: a muller

Emmy Noether

- Naceu en Erlangen (Alemania) en 1882.
- Seu pai era o matemático Max Noether.
- Asistiu como oínte á Universidade (1900).
- Foi a Gottingen a estudiar con Hilbert, Klein e Minkowski (1903).
- Doutorouse dirixida por Paul Gordan (1907).
- A súa fama medraba, pero non lle deixaban dar clase.
- Deu as clases de Hilbert en Gottingen (1915).
- Emigrou a Estados Unidos cando chegaron os nazis ó poder (1933).
- Morreu repentinamente en 1935.

# Emmy Noether: a muller

Emmy Noether

- Naceu en Erlangen (Alemania) en 1882.
- Seu pai era o matemático Max Noether.
- Asistiu como oínte á Universidade (1900).
- Foi a Gottingen a estudiar con Hilbert, Klein e Minkowski (1903).
- Doutorouse dirixida por Paul Gordan (1907).
- A súa fama medraba, pero non lle deixaban dar clase.
- Deu as clases de Hilbert en Gottingen (1915).
- Emigrou a Estados Unidos cando chegaron os nazis ó poder (1933).
- Morreu repentinamente en 1935.

# Emmy Noether: a muller

Emmy Noether

- Naceu en Erlangen (Alemania) en 1882.
- Seu pai era o matemático Max Noether.
- Asistiu como oínte á Universidade (1900).
- Foi a Gottingen a estudiar con Hilbert, Klein e Minkowski (1903).
- Doutorouse dirixida por Paul Gordan (1907).
- A súa fama medraba, pero non lle deixaban dar clase.
- Deu as clases de Hilbert en Gottingen (1915).
- Emigrou a Estados Unidos cando chegaron os nazis ó poder (1933).
- Morreu repentinamente en 1935.

# Emmy Noether: a muller

Emmy Noether

- Naceu en Erlangen (Alemania) en 1882.
- Seu pai era o matemático Max Noether.
- Asistiu como oínte á Universidade (1900).
- Foi a Gottingen a estudiar con Hilbert, Klein e Minkowski (1903).
- Doutorouse dirixida por Paul Gordan (1907).
- A súa fama medraba, pero non lle deixaban dar clase.
- Deu as clases de Hilbert en Gottingen (1915).
- Emigrou a Estados Unidos cando chegaron os nazis ó poder (1933).
- Morreu repentinamente en 1935.

# Emmy Noether: a muller

Emmy Noether

- Naceu en Erlangen (Alemania) en 1882.
- Seu pai era o matemático Max Noether.
- Asistiu como oínte á Universidade (1900).
- Foi a Gottingen a estudiar con Hilbert, Klein e Minkowski (1903).
- Doutorouse dirixida por Paul Gordan (1907).
- A súa fama medraba, pero non lle deixaban dar clase.
- Deu as clases de Hilbert en Gottingen (1915).
- Emigrou a Estados Unidos cando chegaron os nazis ó poder (1933).
- Morreu repentinamente en 1935.

# Emmy Noether: a muller

Emmy Noether

- Naceu en Erlangen (Alemania) en 1882.
- Seu pai era o matemático Max Noether.
- Asistiu como oínte á Universidade (1900).
- Foi a Gottingen a estudiar con Hilbert, Klein e Minkowski (1903).
- Doutorouse dirixida por Paul Gordan (1907).
- A súa fama medraba, pero non lle deixaban dar clase.
- Deu as clases de Hilbert en Gottingen (1915).
- Emigrou a Estados Unidos cando chegaron os nazis ó poder (1933).
- Morreu repentinamente en 1935.

# Uns pequenos preliminares

### Grupo

Os movementos no plano (xiros, traslacións e simetrías): podemos compoñelos, podemos non facer nada e podemos desfacelos.

### Anel

Os números enteiros coa suma e a multiplicación. Neste caso a multiplicación é conmutativa (anel conmutativo).

# Uns pequenos preliminares

## Grupo

Os movementos no plano (xiros, traslacións e simetrías): podemos compoñelos, podemos non facer nada e podemos desfacelos.

## Anel

Os números enteiros coa suma e a multiplicación. Neste caso a multiplicación é conmutativa (anel conmutativo).

# Emmy Noether: a matemática (I)

## Teoría de invariantes

Obxectivo: dada unha curva $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} y + \cdots + a_i x^i y^j + \cdots + a_1 x + a_0 y + b = 0$, obter as características que non cambian baixo transformacións xeométricas.

### O Teorema de Noether

Relaciona a existencia de simetrías abstractas (ou existencia de invariantes) con principios de conservación en Física.

### O Problema de Noether

En 1918 enuncia o problema inverso de Galois e o problema de Noether.

# Emmy Noether: a matemática (I)

### Teoría de invariantes

Obxectivo: dada unha curva $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} y + \cdots + a_i x^i y^j + \cdots + a_1 x + a_0 y + b = 0$, obter as características que non cambian baixo transformacións xeométricas.

### O Teorema de Noether

Relaciona a existencia de simetrías abstractas (ou existencia de invariantes) con principios de conservación en Física.

### O Problema de Noether

En 1918 enuncia o problema inverso de Galois e o problema de Noether.

# Emmy Noether: a matemática (I)

Teoría de invariantes

Obxectivo: dada unha curva $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} y + \cdots + a_i x^i y^j + \cdots + a_1 x + a_0 y + b = 0$, obter as características que non cambian baixo transformacións xeométricas.

## O Teorema de Noether

Relaciona a existencia de simetrías abstractas (ou existencia de invariantes) con principios de conservación en Física.

## O Problema de Noether

En 1918 enuncia o problema inverso de Galois e o problema de Noether.

# Emmy Noether: a matemática (I)

Teoría de invariantes

Obxectivo: dada unha curva $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} y + \cdots + a_i x^i y^j + \cdots + a_1 x + a_0 y + b = 0$, obter as características que non cambian baixo transformacións xeométricas.

## O Teorema de Noether

Relaciona a existencia de simetrías abstractas (ou existencia de invariantes) con principios de conservación en Física.

## O Problema de Noether

En 1918 enuncia o problema inverso de Galois e o problema de Noether. Eu tamén son noetheriana!

# Emmy Noether: a matemática (II)

## Teoría de ideais

Obxectivo: estudiar a estructura de distintos tipos de aneis conmutativos.

### A unificación da Álxebra

Emmy aborda ambos problemas dende un punto de vista único: os aneis de números e os aneis de polinomios verifican os mesmos axiomas. Nace a Álxebra moderna, axiomática e abstracta, tal e como a estudiamos hoxe en día.

# Emmy Noether: a matemática (II)

## Teoría de ideais

Obxectivo: estudiar a estructura de distintos tipos de aneis conmutativos.

**Dedekind**(1831-1916)

### A unificación da Álxebra

Emmy aborda ambos problemas dende un punto de vista único: os aneis de números e os aneis de polinomios verifican os mesmos axiomas. Nace a Álxebra moderna, axiomática e abstracta, tal e como a estudiamos hoxe en día.

# Emmy Noether: a matemática (II)

## Teoría de ideais

Obxectivo: estudiar a estructura de distintos tipos de aneis conmutativos.

**Dedekind**(1831-1916)
Aneis de enteiros alxébricos.

### A unificación da Álxebra

Emmy aborda ambos problemas dende un punto de vista único: os aneis de números e os aneis de polinomios verifican os mesmos axiomas. Nace a Álxebra moderna, axiomática e abstracta, tal e como a estudiamos hoxe en día.

# Emmy Noether: a matemática (II)

## Teoría de ideais

Obxectivo: estudiar a estructura de distintos tipos de aneis conmutativos.

**Dedekind**(1831-1916)
Aneis de enteiros alxébricos.
Resultados de factorización

### A unificación da Álxebra

Emmy aborda ambos problemas dende un punto de vista único: os aneis de números e os aneis de polinomios verifican os mesmos axiomas. Nace a Álxebra moderna, axiomática e abstracta, tal e como a estudiamos hoxe en día.

# Emmy Noether: a matemática (II)

## Teoría de ideais

Obxectivo: estudiar a estructura de distintos tipos de aneis conmutativos.

| **Dedekind**(1831-1916) | **Hilbert**(1862-1943) |
|---|---|
| Aneis de enteiros alxébricos.<br>Resultados de factorización | |

### A unificación da Álxebra

Emmy aborda ambos problemas dende un punto de vista único: os aneis de números e os aneis de polinomios verifican os mesmos axiomas. Nace a Álxebra moderna, axiomática e abstracta, tal e como a estudiamos hoxe en día.

# Emmy Noether: a matemática (II)

## Teoría de ideais

Obxectivo: estudiar a estructura de distintos tipos de aneis conmutativos.

| **Dedekind**(1831-1916) | **Hilbert**(1862-1943) |
|---|---|
| Aneis de enteiros alxébricos.<br>Resultados de factorización | Ideais en aneis de polinomios. |

### A unificación da Álxebra

Emmy aborda ambos problemas dende un punto de vista único: os aneis de números e os aneis de polinomios verifican os mesmos axiomas. Nace a Álxebra moderna, axiomática e abstracta, tal e como a estudiamos hoxe en día.

# Emmy Noether: a matemática (II)

## Teoría de ideais

Obxectivo: estudiar a estructura de distintos tipos de aneis conmutativos.

| **Dedekind**(1831-1916) | **Hilbert**(1862-1943) |
|---|---|
| Aneis de enteiros alxébricos. | Ideais en aneis de polinomios. |
| Resultados de factorización | Caracterizacións de ideais. |

### A unificación da Álxebra

Emmy aborda ambos problemas dende un punto de vista único: os aneis de números e os aneis de polinomios verifican os mesmos axiomas. Nace a Álxebra moderna, axiomática e abstracta, tal e como a estudiamos hoxe en día.

# Emmy Noether: a matemática (II)

## Teoría de ideais

Obxectivo: estudiar a estructura de distintos tipos de aneis conmutativos.

| **Dedekind**(1831-1916) | **Hilbert**(1862-1943) |
|---|---|
| Aneis de enteiros alxébricos. | Ideais en aneis de polinomios. |
| Resultados de factorización | Caracterizacións de ideais. |

### A unificación da Álxebra

Emmy aborda ambos problemas dende un punto de vista único: os aneis de números e os aneis de polinomios verifican os mesmos axiomas. Nace a Álxebra moderna, axiomática e abstracta, tal e como a estudiamos hoxe en día.

# A continuación ...

1. Emmy Noether: A nai da Álxebra

2. O Problema de Noether

3. Eu tamén son noetheriana!

# Cando podemos resolver $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$?

Empezamos por $x^2 + ax + b = 0$

### En xeral

Os coeficientes de $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ son funcións simétricas das súas raíces. Estas simetrías codifícanse cun grupo $G$.

# Cando podemos resolver $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$?

Empezamos por $x^2 + ax + b = 0$
$\alpha, \beta$ solucións $\Rightarrow x^2 + ax + b = (x - \alpha)(x - \beta)$

**En xeral**

Os coeficientes de $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$ son funcións simétricas das súas raíces. Estas simetrías codifícanse cun grupo $G$.

# Cando podemos resolver $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$?

Empezamos por $x^2 + ax + b = 0$
$\alpha, \beta$ solucións $\Rightarrow x^2 + ax + b = (x-\alpha)(x-\beta)$
$$\Rightarrow \begin{cases} a = -(\alpha+\beta) \\ b = \alpha\beta \end{cases}$$

**En xeral**

Os coeficientes de $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ son funcións simétricas das súas raíces. Estas simetrías codifícanse cun grupo $G$.

## Cando podemos resolver $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$?

Empezamos por $x^2 + ax + b = 0$
$\alpha, \beta$ solucións $\Rightarrow x^2 + ax + b = (x-\alpha)(x-\beta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -(\alpha+\beta) & = -(\beta+\alpha) \\ b = \alpha\beta & = \beta\alpha \end{cases}$$

**En xeral**

Os coeficientes de $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ son funcións simétricas das súas raíces. Estas simetrías codifícanse cun grupo $G$.

# Cando podemos resolver $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$?

Empezamos por $x^2 + ax + b = 0$

$\alpha, \beta$ solucións $\Rightarrow x^2 + ax + b = (x-\alpha)(x-\beta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = f(\alpha,\beta) & = -(\beta+\alpha) \\ b = g(\alpha,\beta) & = \beta\alpha \end{cases}$$

**En xeral**

Os coeficientes de $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ son funcións simétricas das súas raíces. Estas simetrías codifícanse cun grupo $G$.

# Cando podemos resolver $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$?

Empezamos por $x^2 + ax + b = 0$
$\alpha, \beta$ solucións $\Rightarrow x^2 + ax + b = (x-\alpha)(x-\beta)$
$$\Rightarrow \begin{cases} a = f(\alpha,\beta) & = f(\beta,\alpha) \\ b = g(\alpha,\beta) & = g(\beta,\alpha) \end{cases}$$

**En xeral**

Os coeficientes de $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ son funcións simétricas das súas raíces. Estas simetrías codifícanse cun grupo $G$.

# Cando podemos resolver $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$?

Empezamos por $x^2 + ax + b = 0$

$\alpha, \beta$ solucións $\Rightarrow x^2 + ax + b = (x-\alpha)(x-\beta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = f(\alpha,\beta) & = f(\beta,\alpha) \\ b = g(\alpha,\beta) & = g(\beta,\alpha) \end{cases}$$

Os coeficientes son funcións simétricas das raíces.

**En xeral**

Os coeficientes de $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ son funcións simétricas das súas raíces. Estas simetrías codifícanse cun grupo $G$.

# Cando podemos resolver $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$?

Empezamos por $x^2 + ax + b = 0$
$\alpha, \beta$ solucións $\Rightarrow x^2 + ax + b = (x-\alpha)(x-\beta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = f(\alpha,\beta) & = f(\beta,\alpha) \\ b = g(\alpha,\beta) & = g(\beta,\alpha) \end{cases}$$

Os coeficientes son funcións simétricas das raíces.

**En xeral**

Os coeficientes de $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ son funcións simétricas das súas raíces. Estas simetrías codifícanse cun grupo $G$.

# Cando podemos resolver $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$?

**Técnicas alxébricas:**
Considerámo-la ecuación $x^2 - 2 = 0$ e $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ as súas raíces. Os coeficientes son números racionais, pero as raíces non.

**Solución**

Construímos unha *extensión de corpos* $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ para solucionalo.

**Podemos facelo?**

Si, se elimináмо-las simetrías que fan que os coeficientes permanezan invariantes.

# Cando podemos resolver $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$?

**Técnicas alxébricas:**
Considerámo-la ecuación $x^2 - 2 = 0$ e $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ as súas raíces.
Os coeficientes son números racionais, pero as raíces non.

### Solución

Construímos unha *extensión de corpos* $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ para solucionalo.

### Podemos facelo?

Si, se eliminámo-las simetrías que fan que os coeficientes permanezan invariantes.

# Cando podemos resolver $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$?

**Técnicas alxébricas:**
Considerámo-la ecuación $x^2 - 2 = 0$ e $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ as súas raíces.
Os coeficientes son números racionais, pero as raíces non.

### Solución

Construímos unha *extensión de corpos* $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ para solucionalo.

### Podemos facelo?

Si, se eliminámo-las simetrías que fan que os coeficientes permanezan invariantes.

# Cando podemos resolver $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$?

**Técnicas alxébricas:**
Sexa $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ e $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ as súas raíces.
Os coeficientes son números racionais, pero as raíces poden non selo.

**Resposta**

Cando somos capaces de elimina-las simetrías que deixan fixos os coeficientes, codificadas no *grupo de Galois G*.

# Cando podemos resolver $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$?

**Técnicas alxébricas:**
Sexa $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ e $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ as súas raíces.
Os coeficientes son números racionais, pero as raíces poden non selo.
Cando podemos construír a extensión de corpos $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$?.

**Resposta**

Cando somos capaces de elimina-las simetrías que deixan fixos os coeficientes, codificadas no *grupo de Galois G*.

## Cando podemos resolver $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$?

**Técnicas alxébricas:**
Sexa $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ e $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ as súas raíces.
Os coeficientes son números racionais, pero as raíces poden non selo.
Cando podemos construír a extensión de corpos $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$?.

**Resposta**

Cando somos capaces de elimina-las simetrías que deixan fixos os coeficientes, codificadas no *grupo de Galois* $G$.

# O problema de Noether

## Problema de Galois

Dada unha extensión de corpos arbitraria $K \hookrightarrow F$, atopa-lo seu grupo de Galois.

## Problema inverso de Galois

Dado un corpo $K$ e un grupo $G$, hai algún corpo $F$ que cumpla que $G$ é o grupo de Galois de $K \hookrightarrow F$?

# O problema de Noether

## Problema de Galois

Dada unha extensión de corpos arbitraria $K \hookrightarrow F$, atopa-lo seu grupo de Galois.

## Problema inverso de Galois

Dado un corpo $K$ e un grupo $G$, hai algún corpo $F$ que cumpla que $G$ é o grupo de Galois de $K \hookrightarrow F$?

# A continuación ...

1. Emmy Noether: A nai da Álxebra
2. O Problema de Noether
3. Eu tamén son noetheriana!

# Álxebras de Hopf

Se $G$ é un grupo, podemos multiplicar dous elementos $g, h \in G$: $g \cdot h \in G$.

**Álxebras de Hopf**

Engadímoslle a $G$ (e polo tanto a $H$) a *comultiplicación*:

$$g \in G \mapsto g \otimes g \in H \otimes H.$$

Desta maneira $H$ é unha álxebra de Hopf.

# Álxebras de Hopf

Se $G$ é un grupo, podemos multiplicar dous elementos $g, h \in G$: $g \cdot h \in G$.
Ás veces necesitamos engadir elementos dun corpo a $G$ para obter a *álxebra de grupo*:

$$H = KG, \text{ onde } K \text{ é un corpo.}$$

## Álxebras de Hopf

Engadímoslle a $G$ (e polo tanto a $H$) a *comultiplicación*:

$$g \in G \mapsto g \otimes g \in H \otimes H.$$

Desta maneira $H$ é unha álxebra de Hopf.

# Álxebras de Hopf

Se $G$ é un grupo, podemos multiplicar dous elementos $g, h \in G$: $g \cdot h \in G$.
Ás veces necesitamos engadir elementos dun corpo a $G$ para obter a *álxebra de grupo*:

$$H = KG, \text{ onde } K \text{ é un corpo.}$$

## Álxebras de Hopf

Engadímoslle a $G$ (e polo tanto a $H$) a *comultiplicación*:

$$g \in G \mapsto g \otimes g \in H \otimes H.$$

Desta maneira $H$ é unha álxebra de Hopf.

# Álxebras de Hopf

Se $G$ é un grupo, podemos multiplicar dous elementos $g, h \in G$: $g \cdot h \in G$.

Ás veces necesitamos engadir elementos dun corpo a $G$ para obter a *álxebra de grupo*:

$$H = KG, \text{ onde } K \text{ é un corpo.}$$

## Álxebras de Hopf

Engadímoslle a $G$ (e polo tanto a $H$) a *comultiplicación*:

$$g \in G \mapsto g \otimes g \in H \otimes H.$$

Desta maneira $H$ é unha álxebra de Hopf.

Unha álxebra de Hopf é un grupo xeneralizado, e podemos definir módulos sobre esta álxebra.

# Álxebras de Hopf

Se $G$ é un grupo, podemos multiplicar dous elementos $g, h \in G$: $g \cdot h \in G$.
Ás veces necesitamos engadir elementos dun corpo a $G$ para obter a *álxebra de grupo*:

$$H = KG, \text{ onde } K \text{ é un corpo.}$$

## Álxebras de Hopf

Engadímoslle a $G$ (e polo tanto a $H$) a *comultiplicación*:

$$g \in G \mapsto g \otimes g \in H \otimes H.$$

Desta maneira $H$ é unha álxebra de Hopf.

Existen estructuras máis xerais todavía, a nós interésannos as álxebras de Hopf febles.

# ''Problema de Ana''

Cambiamos corpos por aneis (álxebras) e grupos por álxebras de Hopf (febles).

## Problema

Dado un anel $B$ e unha álxebra de Hopf (feble) $H$, cando podemos atopar un anel $A$ para o que $H$ sexa o ''grupo de Galois'' da extensión $B \hookrightarrow A$?

## Resposta

Podemos construír un anel $BH$ que baixo certas condicións (técnicas e complicadas) cumpre a condición pedida.

# "Problema de Ana"

Cambiamos corpos por aneis (álxebras) e grupos por álxebras de Hopf (febles).

**Problema**

Dado un anel $B$ e unha álxebra de Hopf (feble) $H$, cando podemos atopar un anel $A$ para o que $H$ sexa o "grupo de Galois" da extensión $B \hookrightarrow A$?

**Resposta**

Podemos construír un anel $BH$ que baixo certas condicións (técnicas e complicadas) cumple a condición pedida.

# "Problema de Ana"

Cambiamos corpos por aneis (álxebras) e grupos por álxebras de Hopf (febles).

## Problema

Dado un anel $B$ e unha álxebra de Hopf (feble) $H$, cando podemos atopar un anel $A$ para o que $H$ sexa o "grupo de Galois" da extensión $B \hookrightarrow A$?

## Resposta

Podemos construír un anel $B \otimes H$ que baixo certas condicións (técnicas e complicadas) cumple a condición pedida.

# "Problema de Ana"

Cambiamos corpos por aneis (álxebras) e grupos por álxebras de Hopf (febles).

## Problema

Dado un anel $B$ e unha álxebra de Hopf (feble) $H$, cando podemos atopar un anel $A$ para o que $H$ sexa o "grupo de Galois" da extensión $B \hookrightarrow A$?

## Resposta

Podemos construír un anel $B \times H$ que baixo certas condicións (técnicas e complicadas) cumple a condición pedida.

Despois de todo, somos unha Universidade e non unha casa de baños.

D. Hilbert